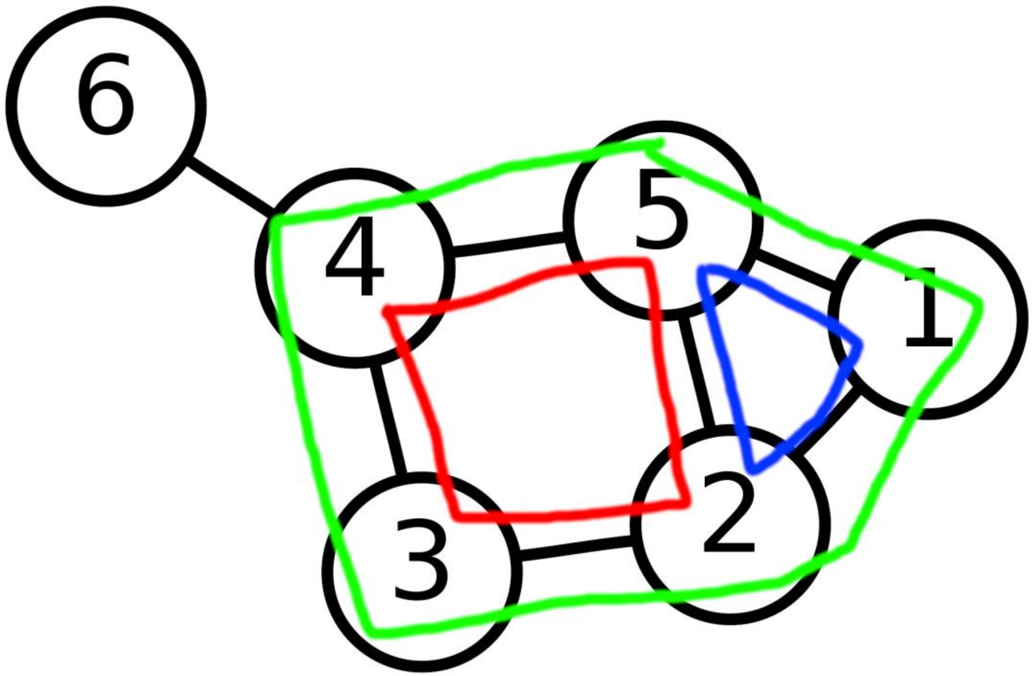
# Grafy:
# kružnice, stromy, kostry

Informatika, ZŠ Broumovská

Petr Socha, 2023
petr.socha@zsbroumovska.cz

# Kružnice

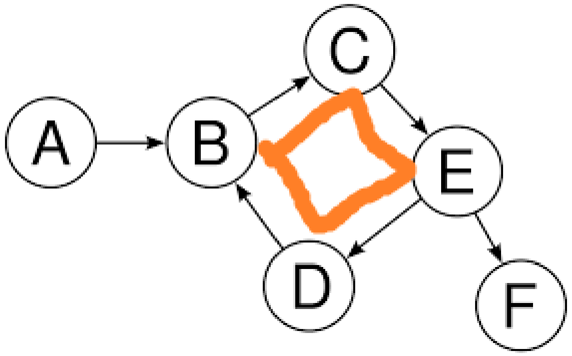
- Kružnice/smyčka v grafu je taková cesta po hranách, kdy lze vyjít z jednoho uzlu a vrátit se do něj jinudy zase zpátky




Na tomhle grafu vidíme tři kružnice:

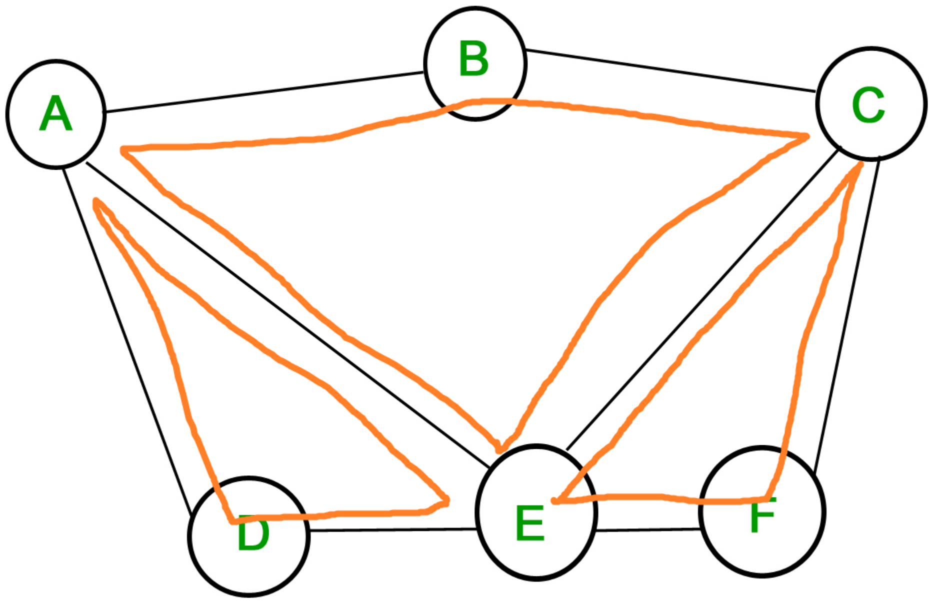
- 1 – 2 – 5 – 1 (délky 3)
- 2 – 3 – 4 – 5 – 2 (délky 4)
- 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 1 (délky 5)

# Kružnice

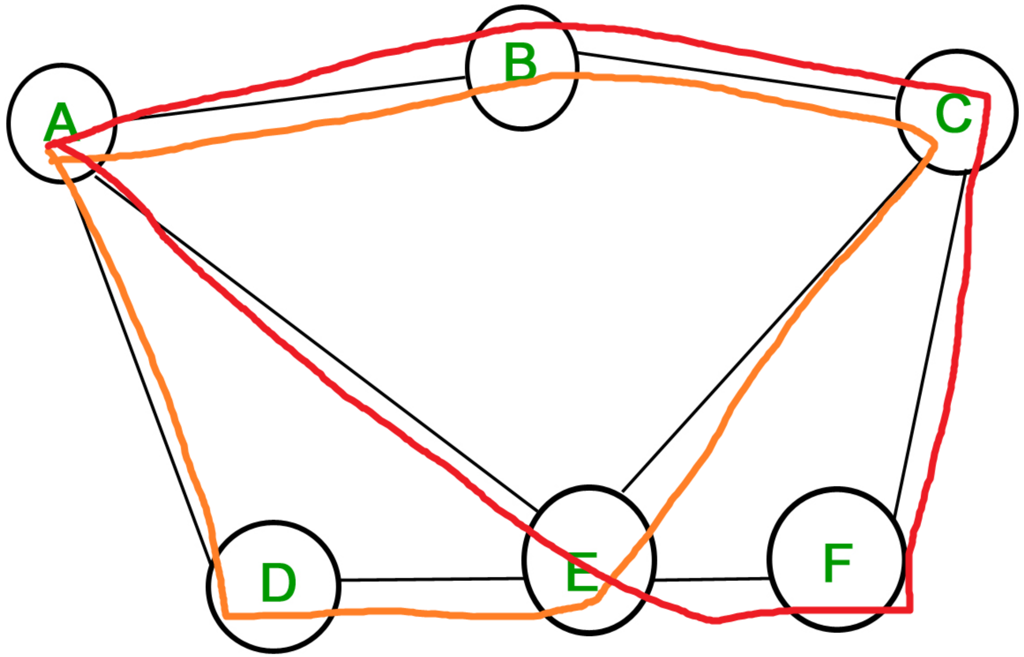


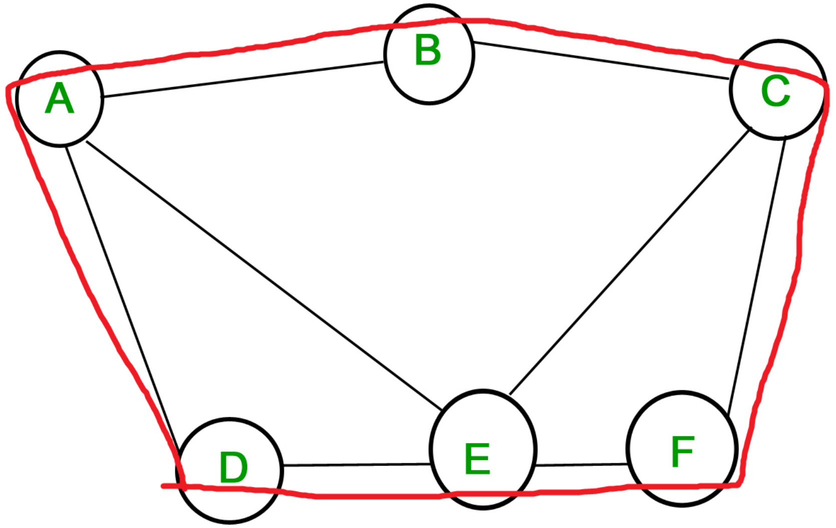

Jedna kružnice

# Kružnice

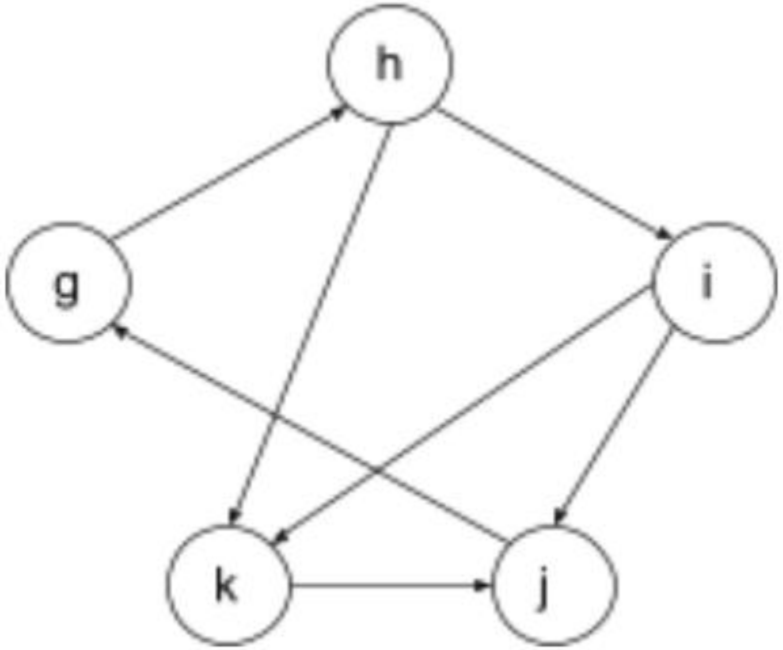


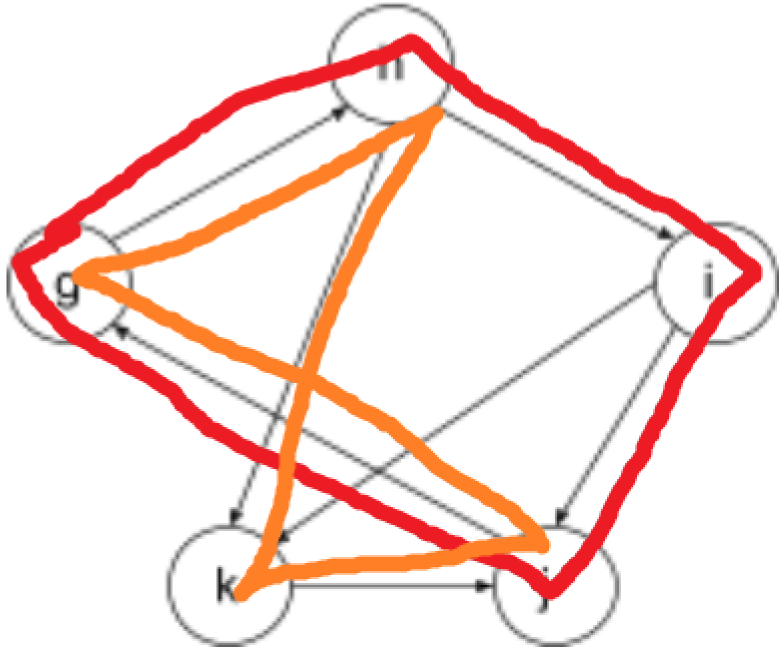

3+2+1 = 6 kružnic



# Kružnice

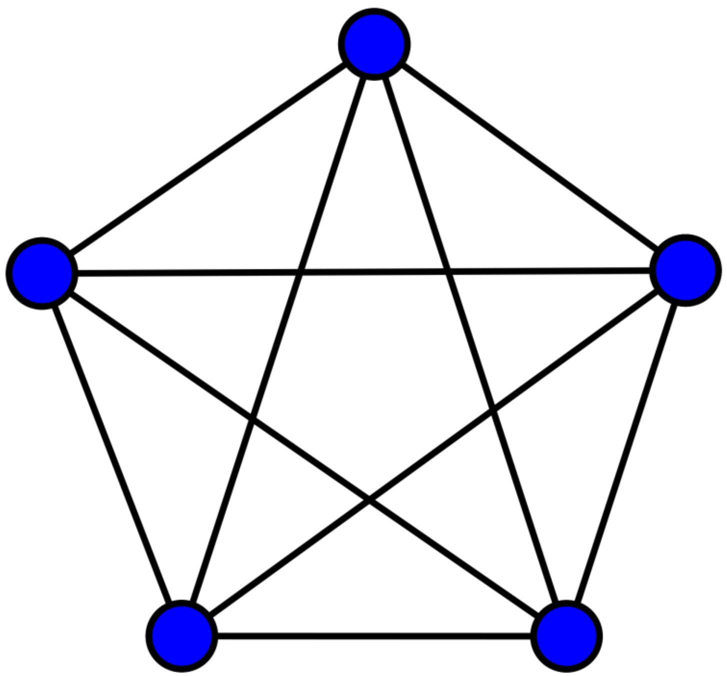



Dvě kružnice

# Kružnice

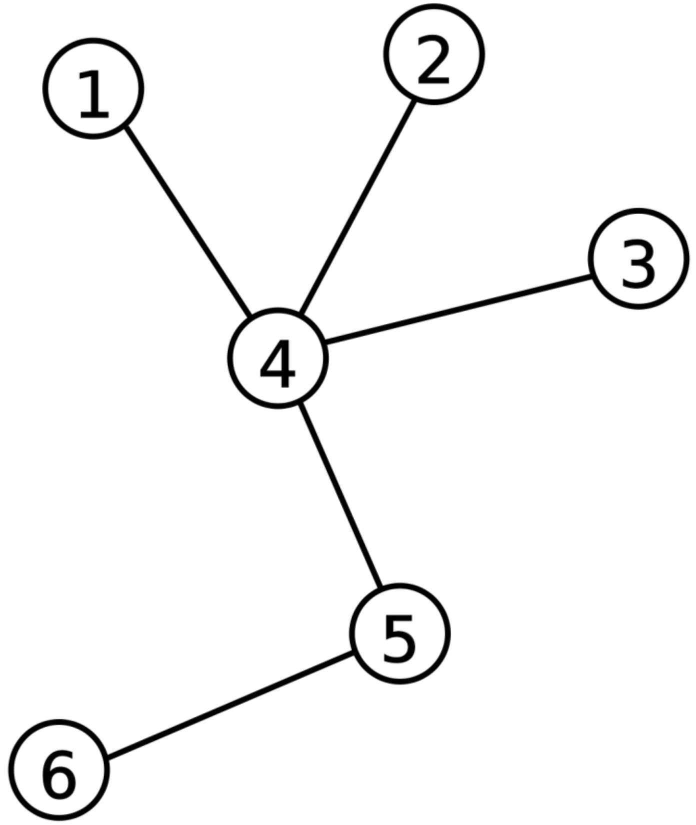
- Kolik existuje kružnic v následujícím grafu?



Nápověda: kolik existuje kružnic délky 5? Kolik délky 4? Kolik délky 3?

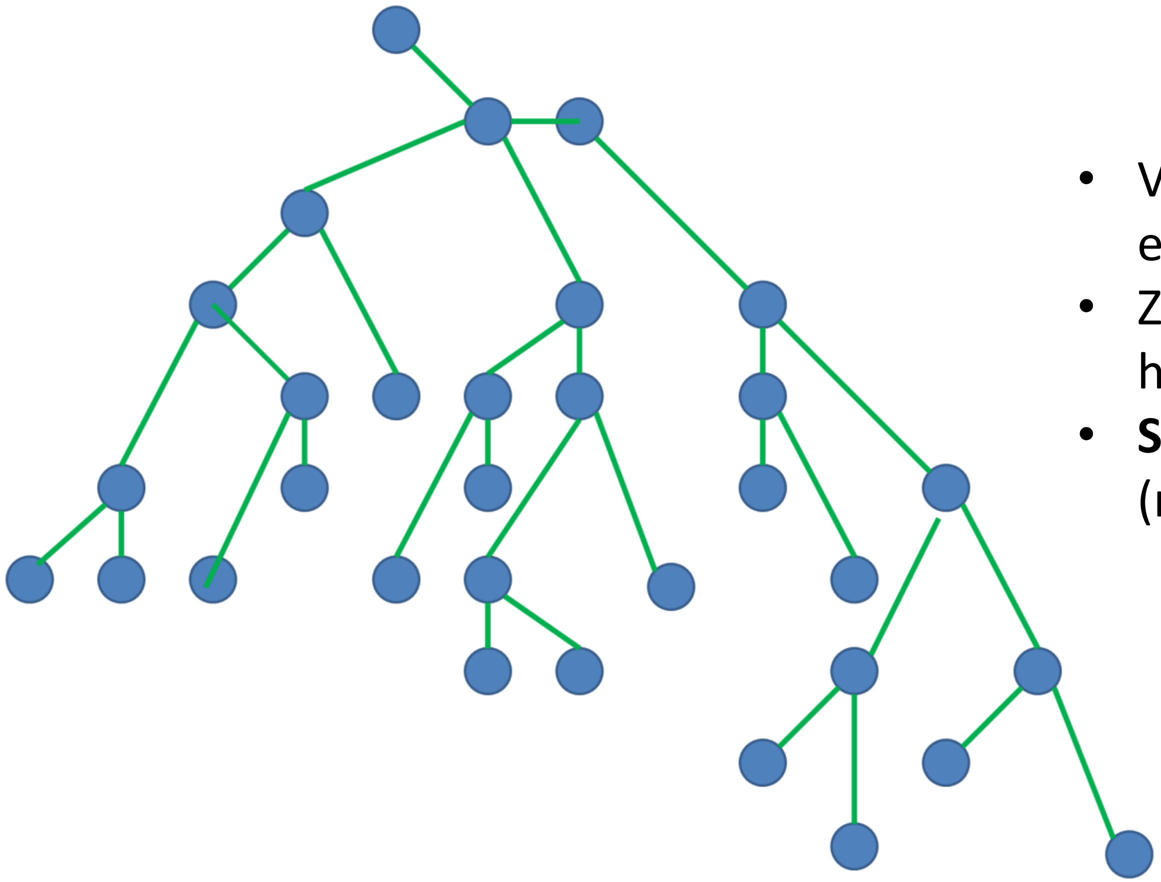
# Kružnice

- Kolik existuje kružnic v následujícím grafu?



# Strom

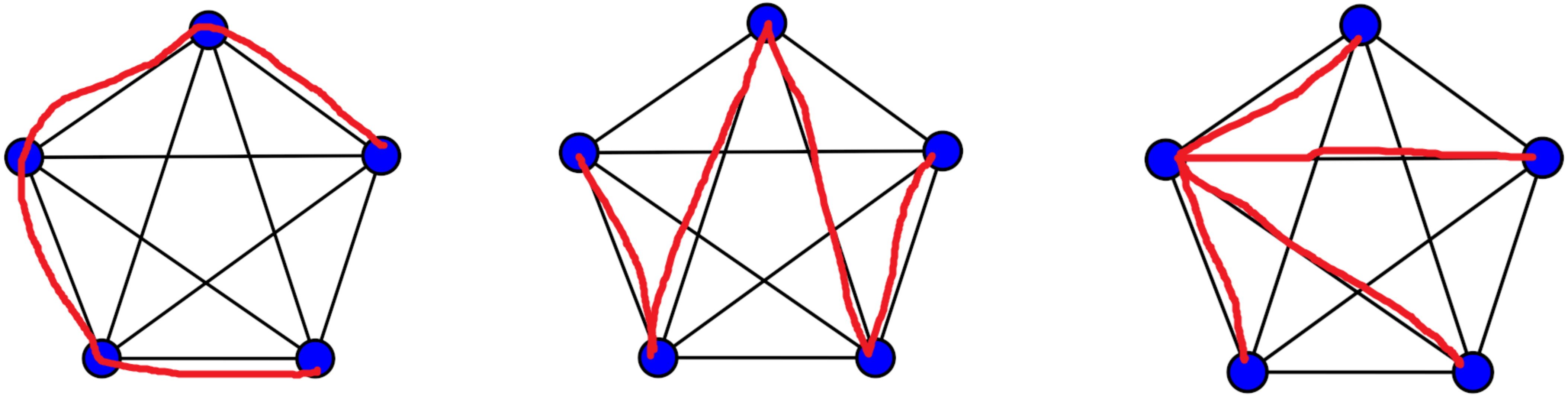
- Graf, ve kterém nejsou žádné kružnice, nazýváme **strom**



- Ve stromu platí, že z každého uzlu do jiného uzlu existuje **právě jedna cesta**
- Zároveň platí, že kdybychom přidali jednu jakoukoliv hranu, **vznikla by kružnice**
- **Strom o N uzlech má vždy N-1 hran**
  (musíme všechny uzly vzájemně propojit)

# Kostra grafu

- V grafu, který obsahuje kružnice, můžeme některé hrany odebrat tak, aby stále **mezi všemi uzly existovalo propojení, ale už ne kružnice**



- Takovému **stromu**, který propojuje všechny uzly původního grafu, říkáme **kostra grafu**

# Kostra grafu

- Kontrolní otázky:

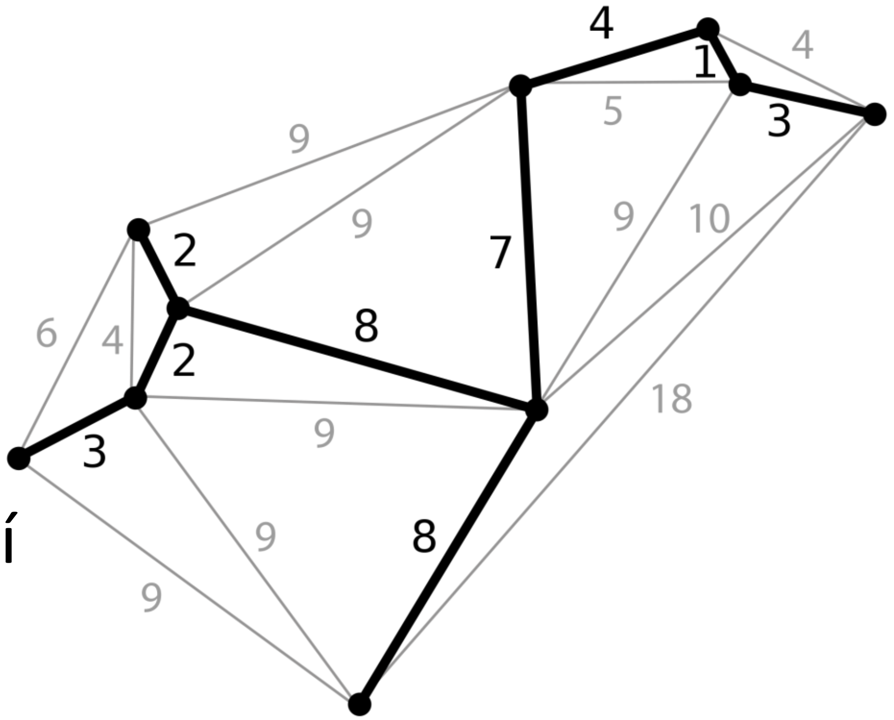
Kolik hran má kostra grafu, který obsahuje 5 uzlů?

Kolik hran má kostra grafu, který obsahuje 10 uzlů?

Kolik hran má kostra grafu, který obsahuje 1000 uzlů?

# Minimální kostra grafu

- Zajímavější začne být kostra ohodnoceného grafu, bude nás totiž zajímat **minimální kostra**, to jest taková, která má nejmenší součet cen obsažených hran
- Na příkladu má kostra součet cen hran 1+2+2+3+3+4+7+8+8 = 38
- Představme si, že **uzly grafu jsou města, a hrany mezi uzly odpovídají vzdálenosti mezi městy**
- Chceme postavit co nejkratší železniční spojení mezi všemi městy
  -> **hledáme minimální kostru**

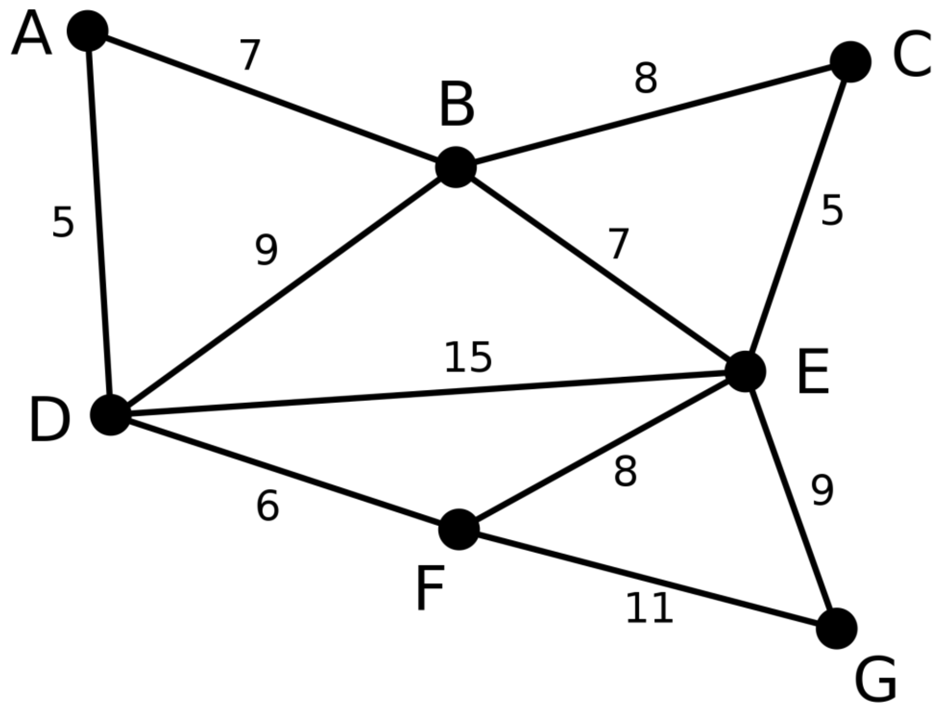


# Minimální kostra grafu

- Pro hledání minimální kostry grafu známe hned několik postupů/algoritmů, z nichž několik má českou stopu:
  - **Borůvkův algoritmus**, objeven 1926
    - Znovuobjeven Choquetem v roce 1938, znovu Florekem, Łukasiewiczem, Perkalem, Steinhausem a Zubrzyckim v roce 1951 a nakonec znovu Sollinem v 60. letech
      - Sollin byl jediným vědcem ze západu, proto je algoritmus **v zahraničí znám jako Sollinův**
  - **Jarníkův algoritmus**, objeven 1930
    - Znovuobjevem Primem v roce 1957, a znovu Dijkstrou v roce 1959
      - **V zahraničí znám jako Primův**, vzácněji jako **Primův-Jarníkův**
  - **Kruskalův algoritmus**, objeven 1956
    - Autor se v úvodu práce odkazuje na Borůvku
- ***Borůvkův algoritmus byl vymyšlen a použit pro elektrifikaci Moravy (minimální kostra grafu obcí = nejlevnější cesta pro natažení drátů s elektřinou)***

# Minimální kostra grafu

- Ukážeme si jeden z algoritmů pro nalezení minimální kostry grafu
- Budeme chtít najít minimální kostru následujícího grafu



# Minimální kostra grafu

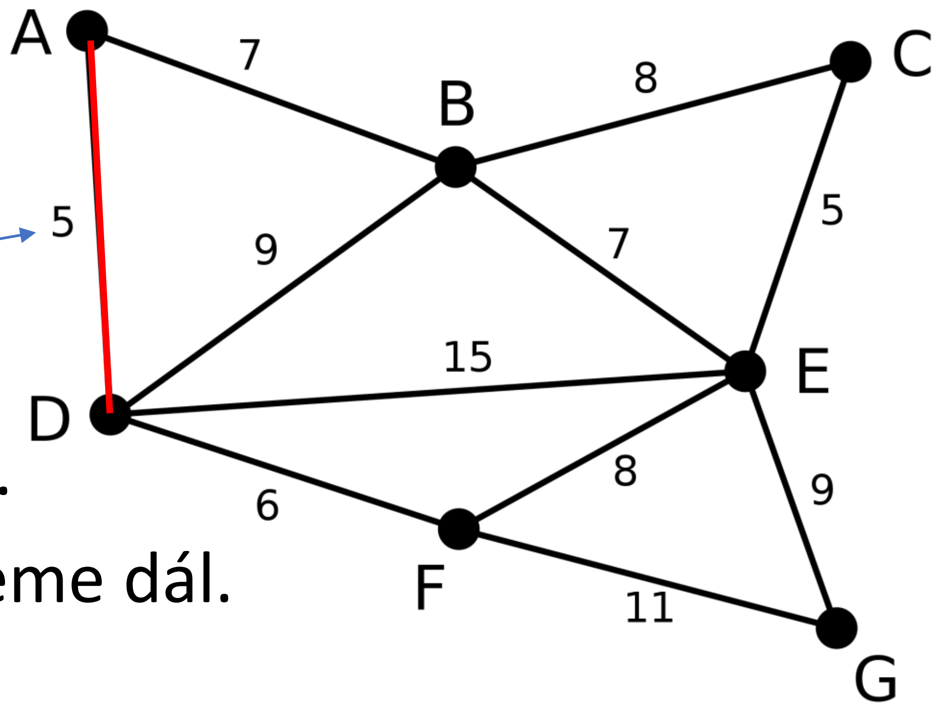
- Postupovat budeme následovně:

Na začátku není v kostře žádná hrana.

1. Najdi nejkratší/nejlevnější hranu, která zatím nebyla přidána do kostry. Pokud už žádná hrana nezbývá, skonči.
2. Zkontroluj, zda jejím přidáním nevznikne v kostře kružnice
3. Pokud kružnice nevznikne, přidej hranu do kostry, jinak hranu vyhoď. Pokračuj bodem 1.

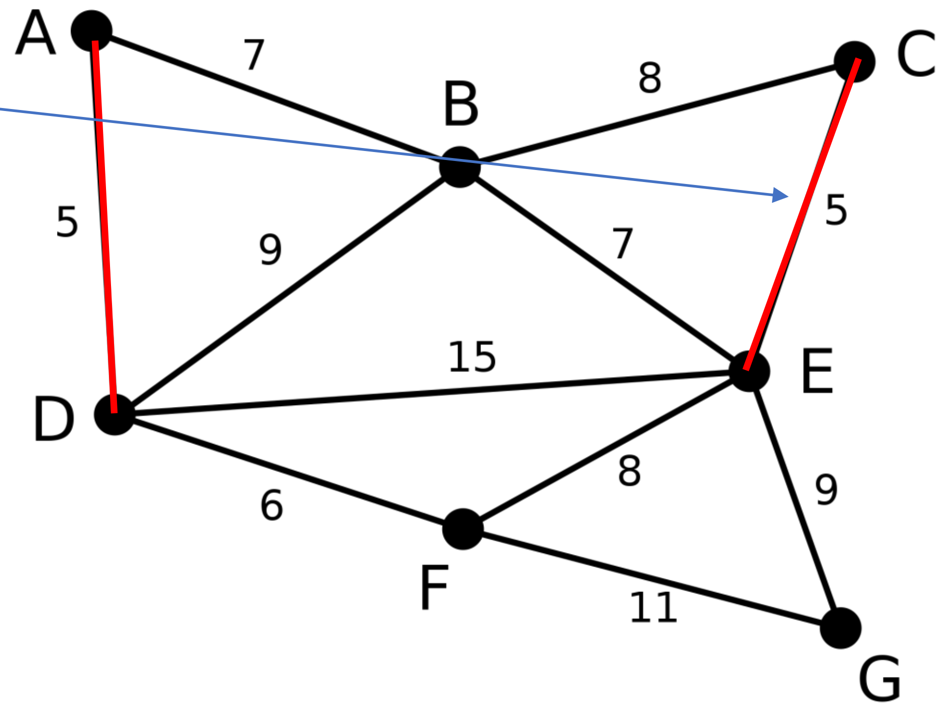
# Minimální kostra grafu

- Začneme tedy bodem 1. Hledáme nejlevnější hranu.
- Nejlevnější je hrana s váhou 5, dokonce máme k dispozici dvě. Náhodně jednu vybereme
- V kostře zatím žádná hrana není, takže nemůže ani vzniknout kružnice.
- Hranu přidáme do kostry a pokračujeme dál.



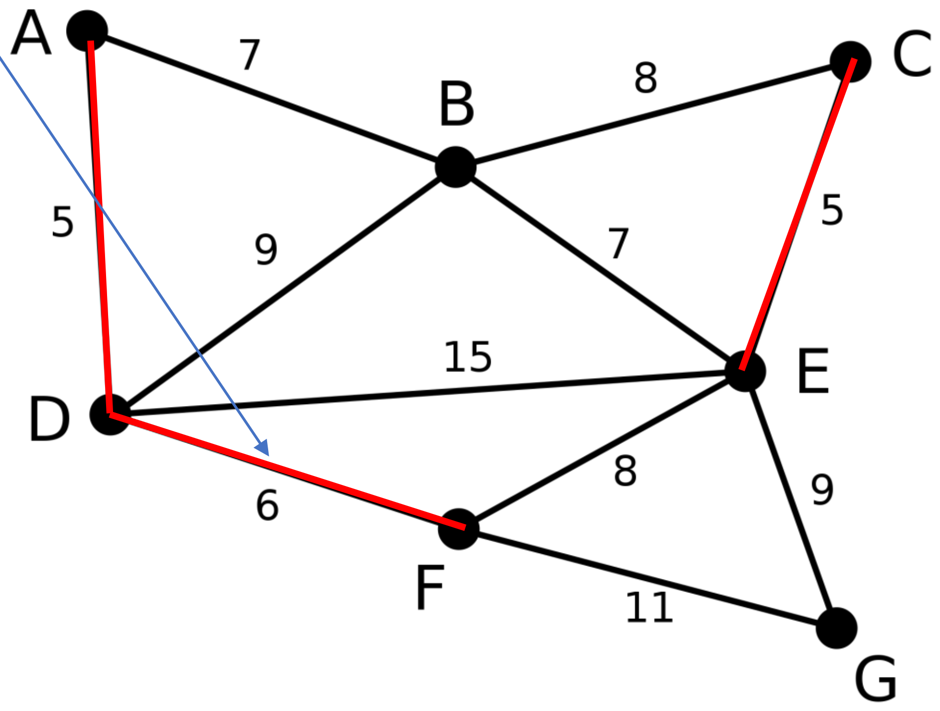
# Minimální kostra grafu

- Další nejlevnější hrana má opět váhu 5
- Jejím přidáním do kostry nevznikne kružnice, takže ji přidáme a pokračujeme dál



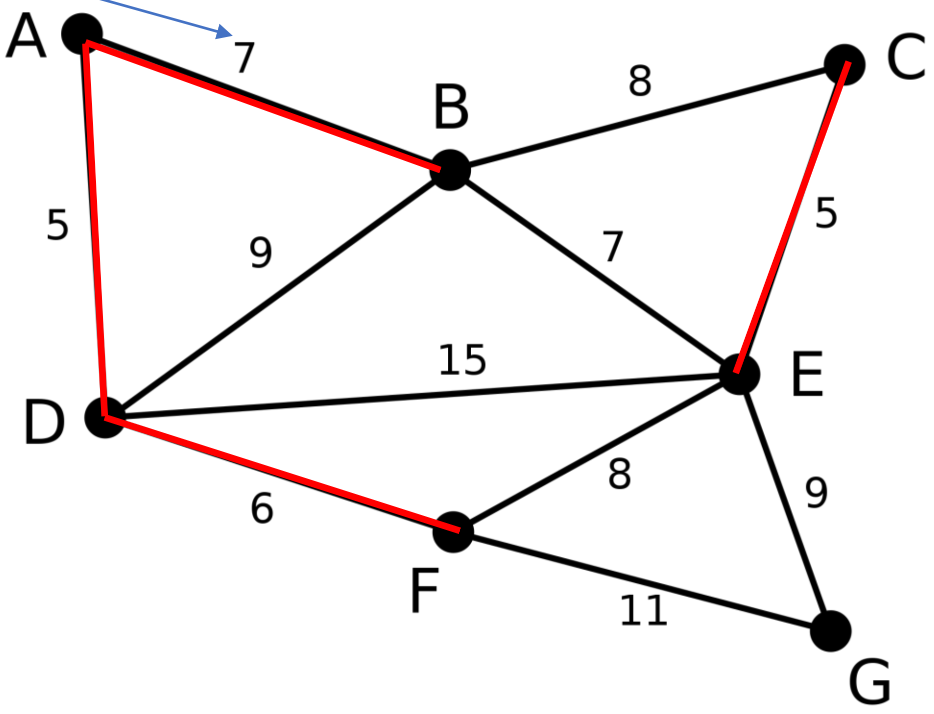
# Minimální kostra grafu

- Další nejlevnější hrana má váhu 6
- Jejím přidáním do kostry
  opět kružnice nevznikne,
  takže ji přidáme a pokračujeme dál



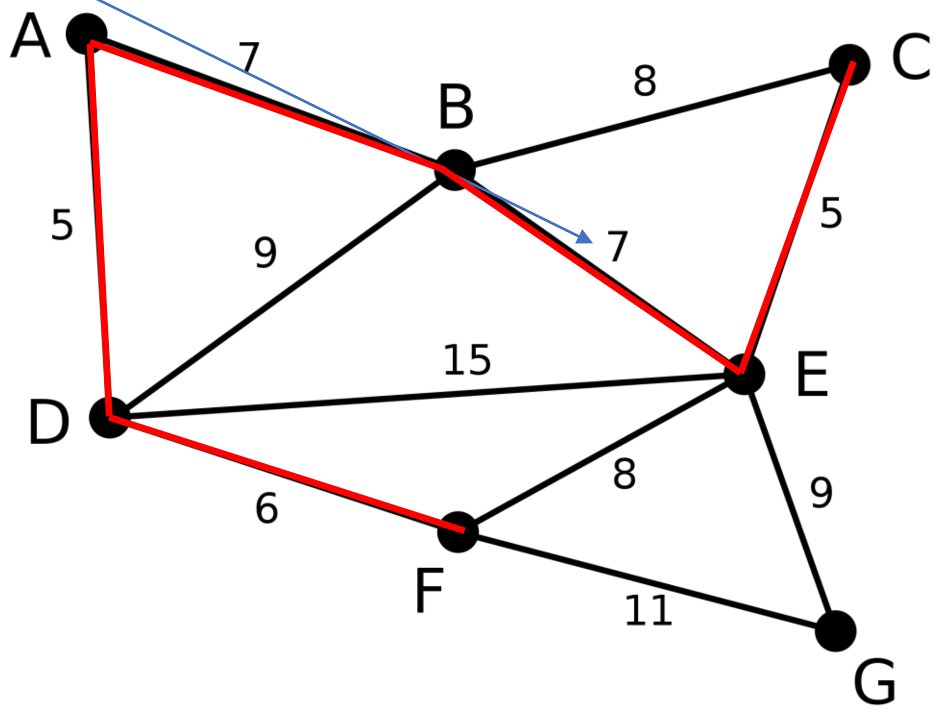
# Minimální kostra grafu

- Další nejlevnější hrana má váhu 7
- Jejím přidáním do kostry opět kružnice nevznikne, takže ji přidáme a pokračujeme dál



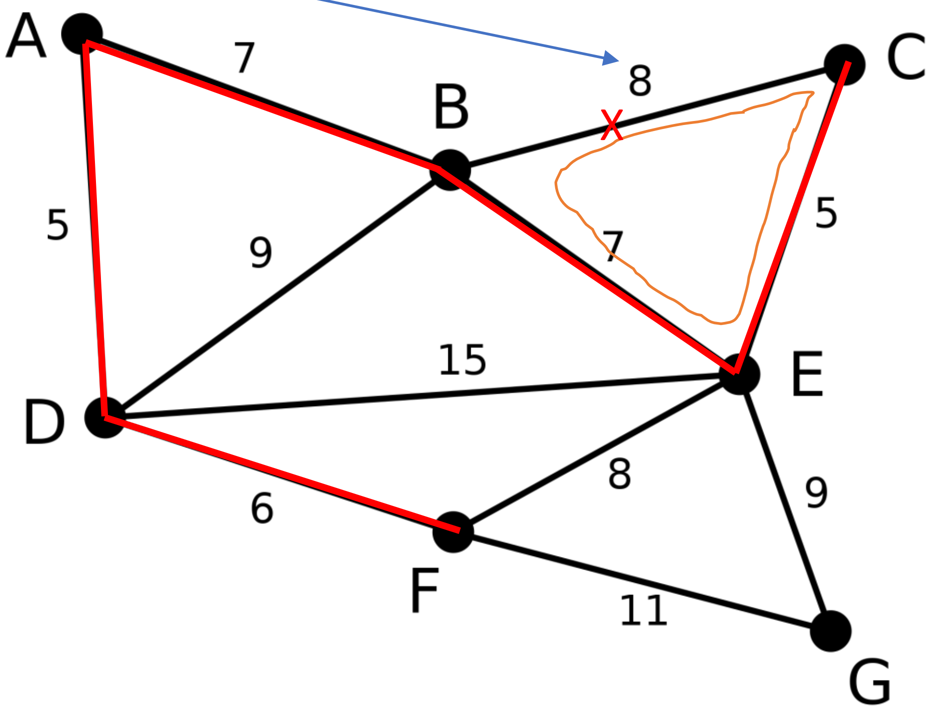
# Minimální kostra grafu

- Další nejlevnější hrana má váhu 7
- Jejím přidáním do kostry opět kružnice nevznikne, takže ji přidáme a pokračujeme dál



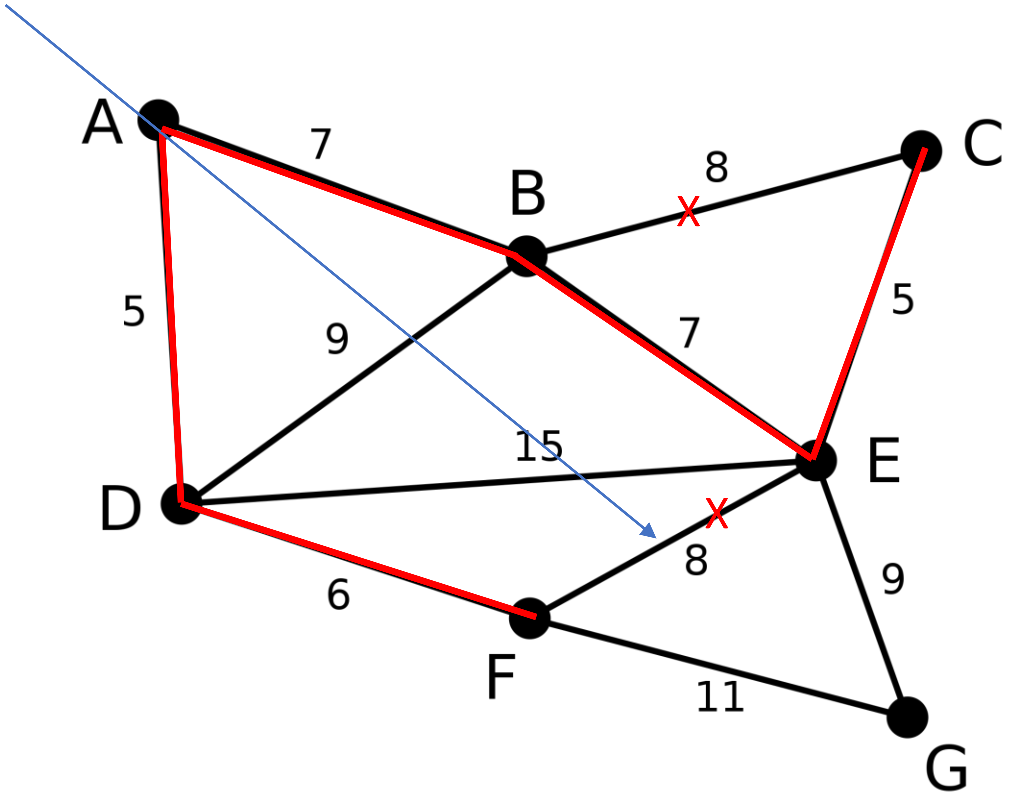
# Minimální kostra grafu

- Další nejlevnější hrana má váhu 8
- Jejím přidáním do kostry by však vznikla kružnice B-C-E-B!
- Hranu tedy do kostry přidat nemůžeme



# Minimální kostra grafu

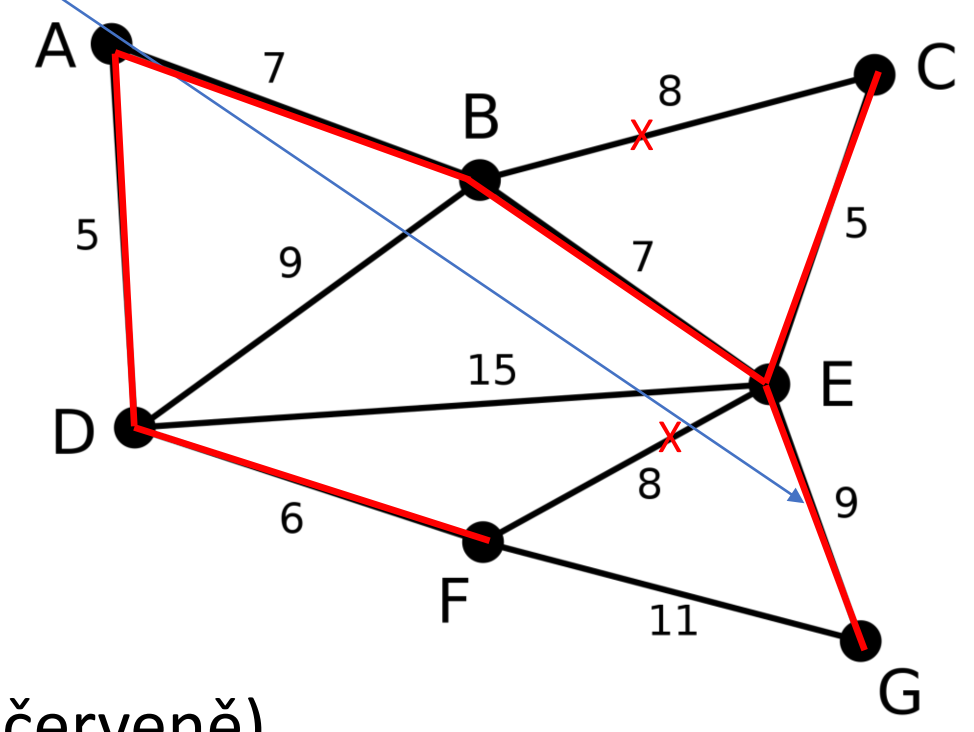
- Další nejlevnější hrana má váhu 8
- Jejím přidáním do kostry by vznikla kružnice A-B-E-F-D-A
- Hranu tedy do kostry přidat nemůžeme



# Minimální kostra grafu

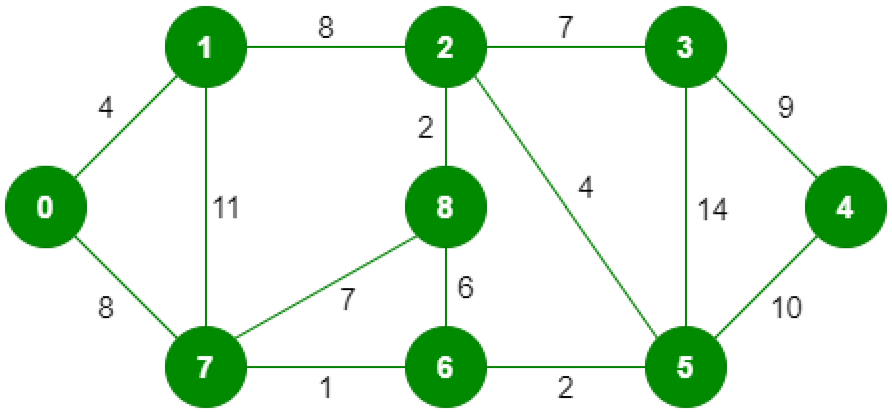
- Další nejlevnější hrana má váhu 9
- Jejím přidáním do kostry kružnice nevznikne
- Hranu tedy přidáme do kostry

- Žádnou další hranu už přidat nemůžeme, protože by vždy vznikla kružnice – ověř!
- Kostru máme hotovou (vyznačenou červeně), a máme jistotu že je **minimální**



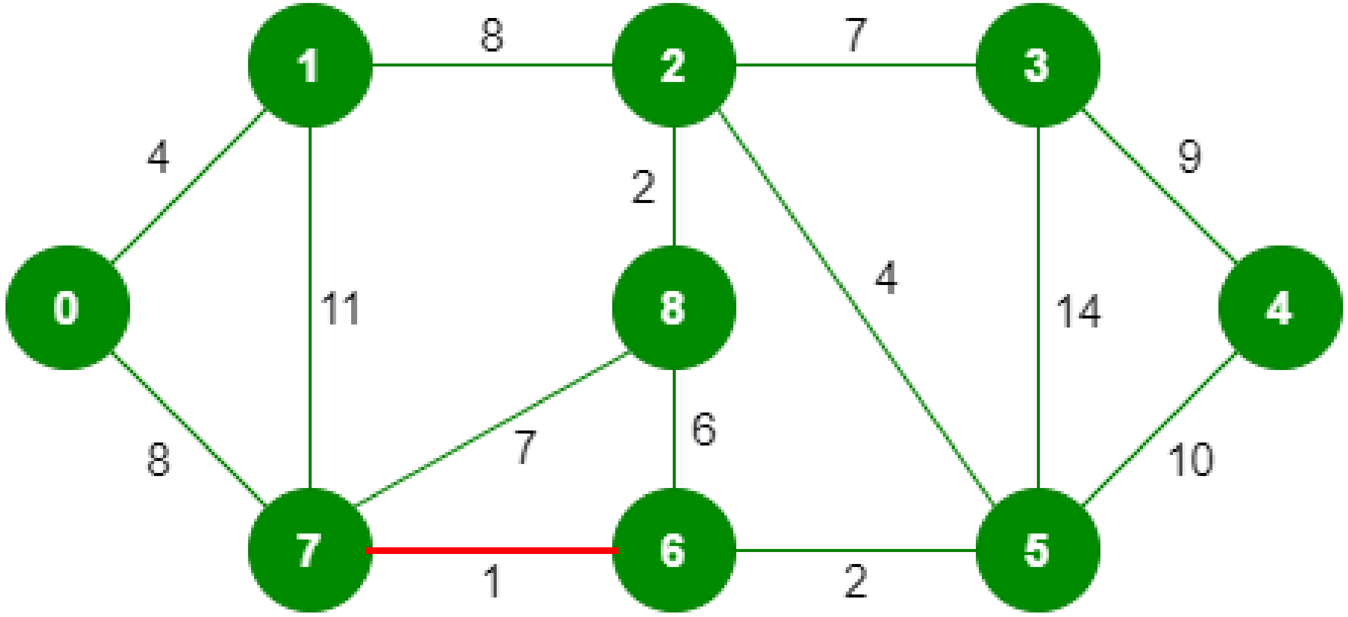
# Minimální kostra grafu – další příklad

- Opět budeme hledat minimální kostru grafu stejným způsobem

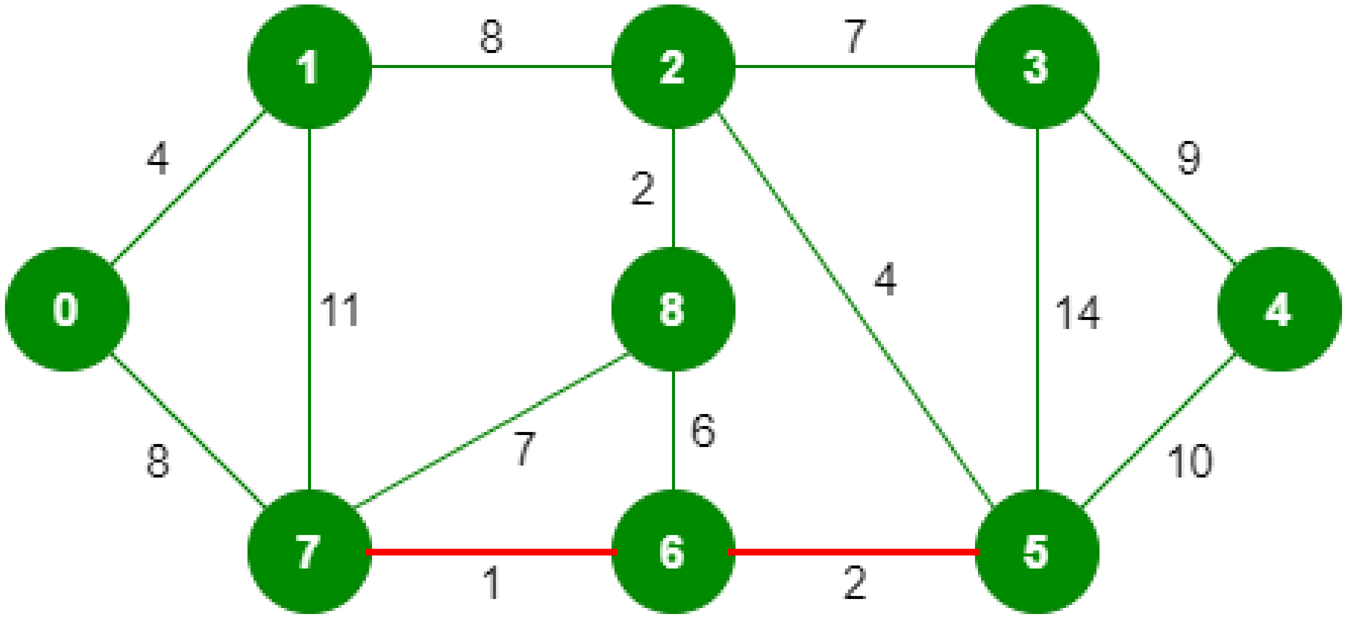



- Tedy začneme od nejlevnějších hran, a postupně je budeme přidávat do kostry jen tehdy, pokud by jejich přidáním nevznikla kružnice

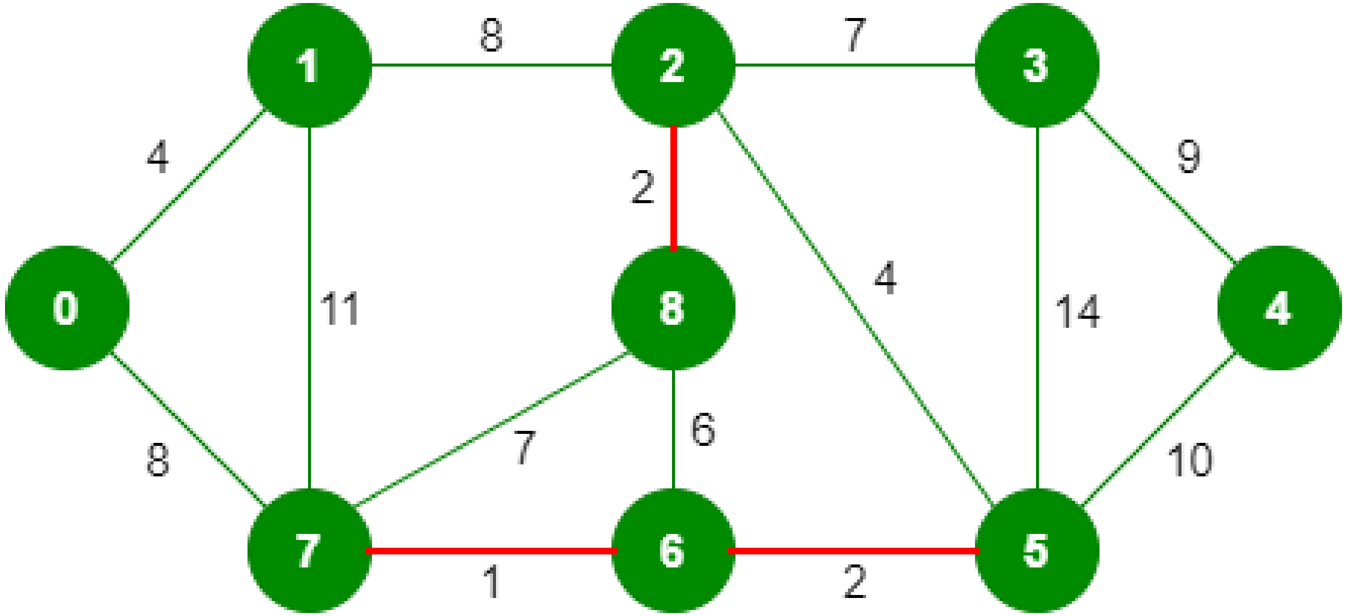
# Minimální kostra grafu – další příklad



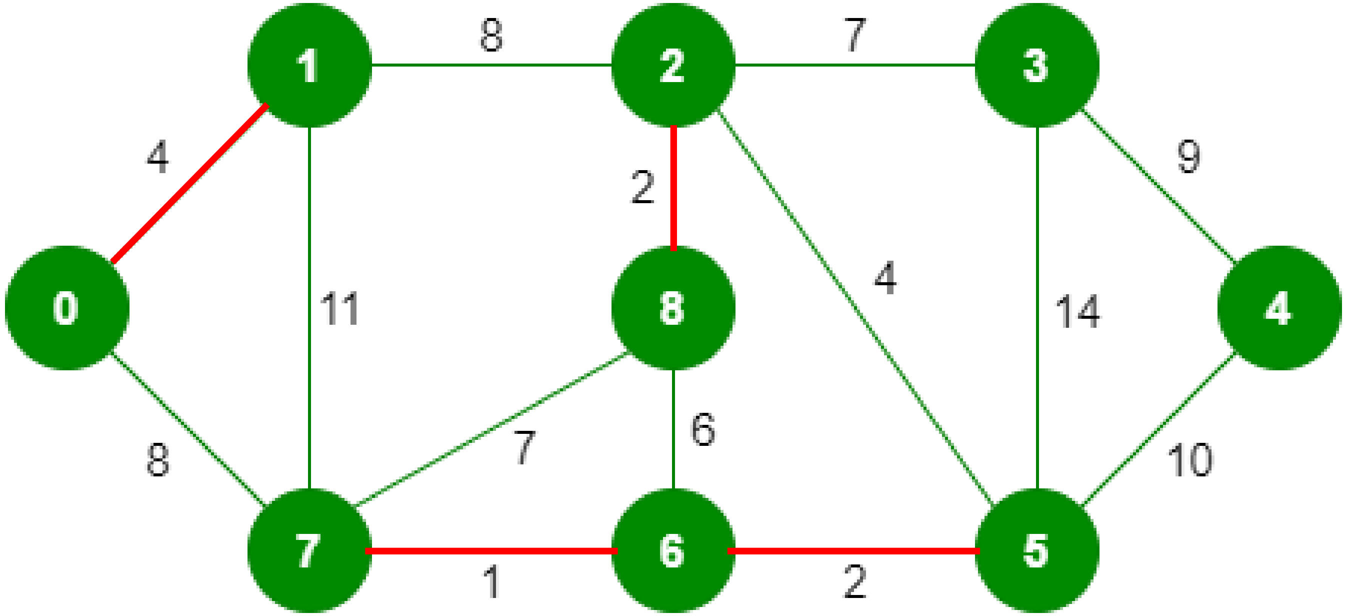
# Minimální kostra grafu – další příklad



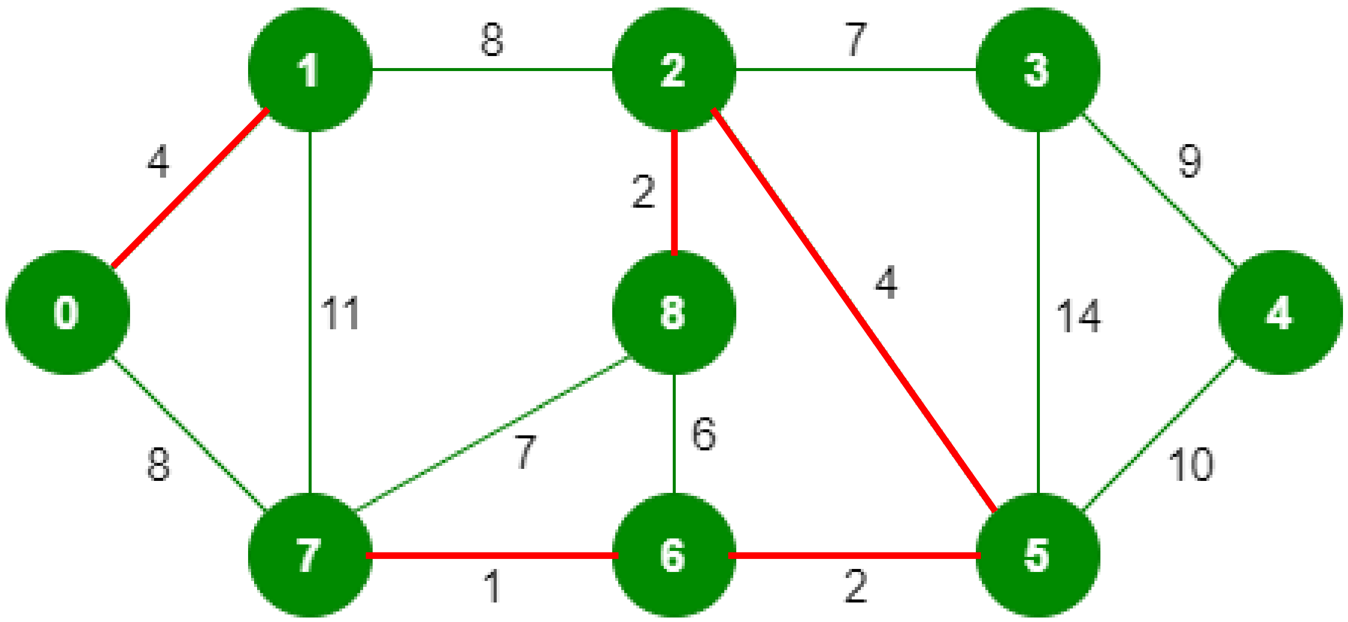
# Minimální kostra grafu – další příklad



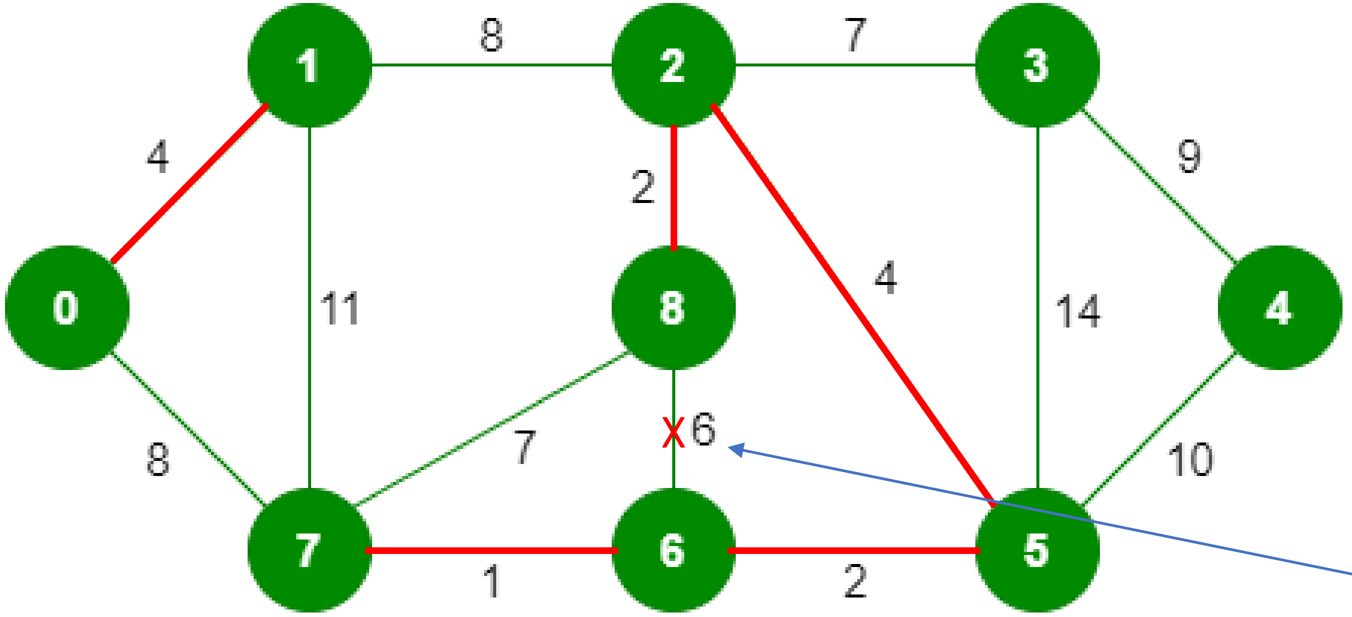
# Minimální kostra grafu – další příklad



# Minimální kostra grafu – další příklad

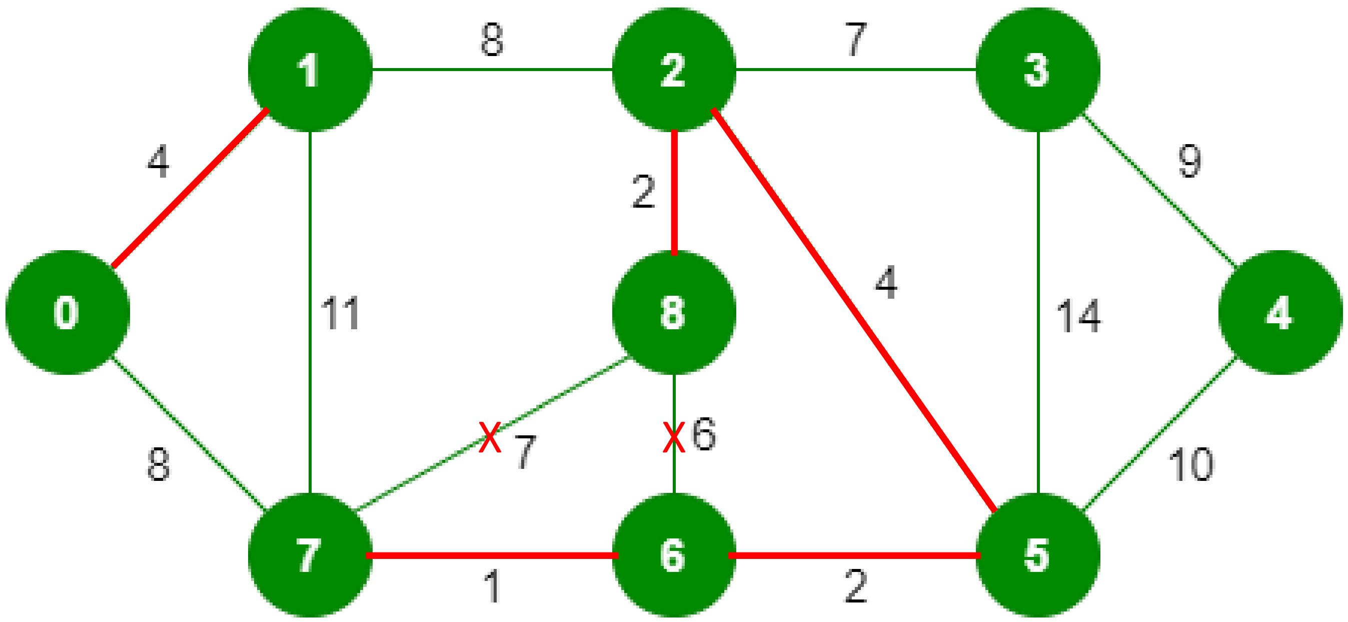


# Minimální kostra grafu – další příklad

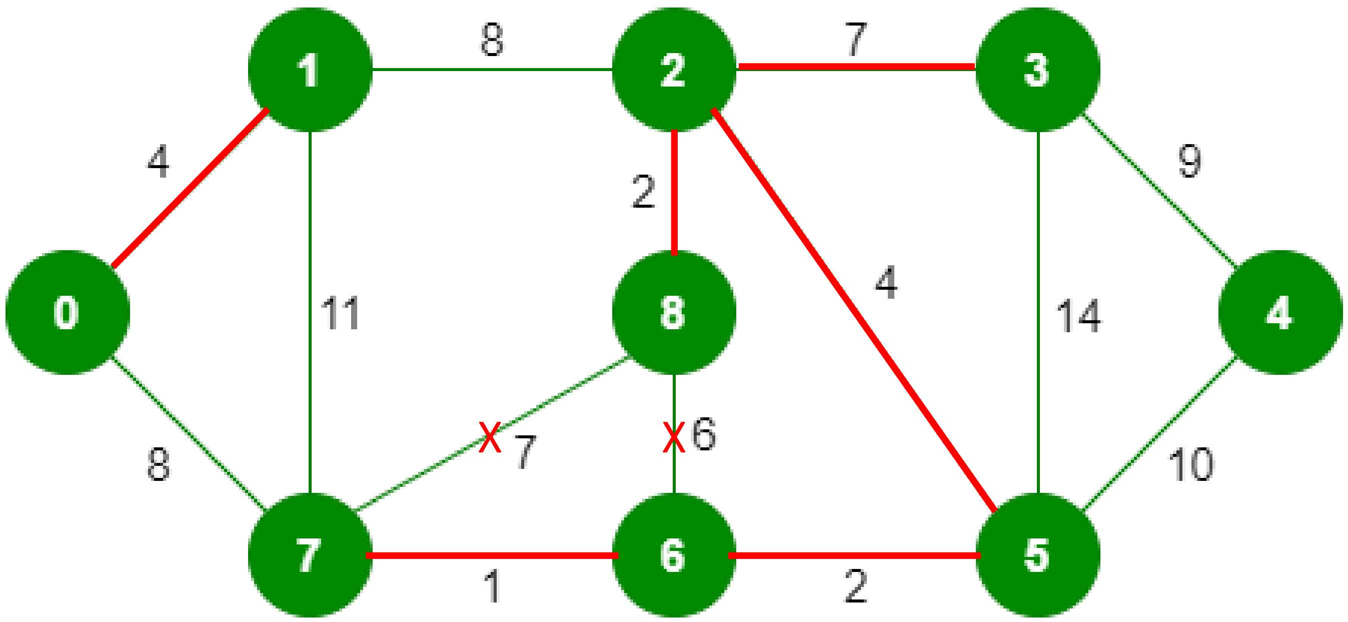



Další na řadě by byla hrana s váhou 6, ale jejím přidáním by vznikla kružnice!

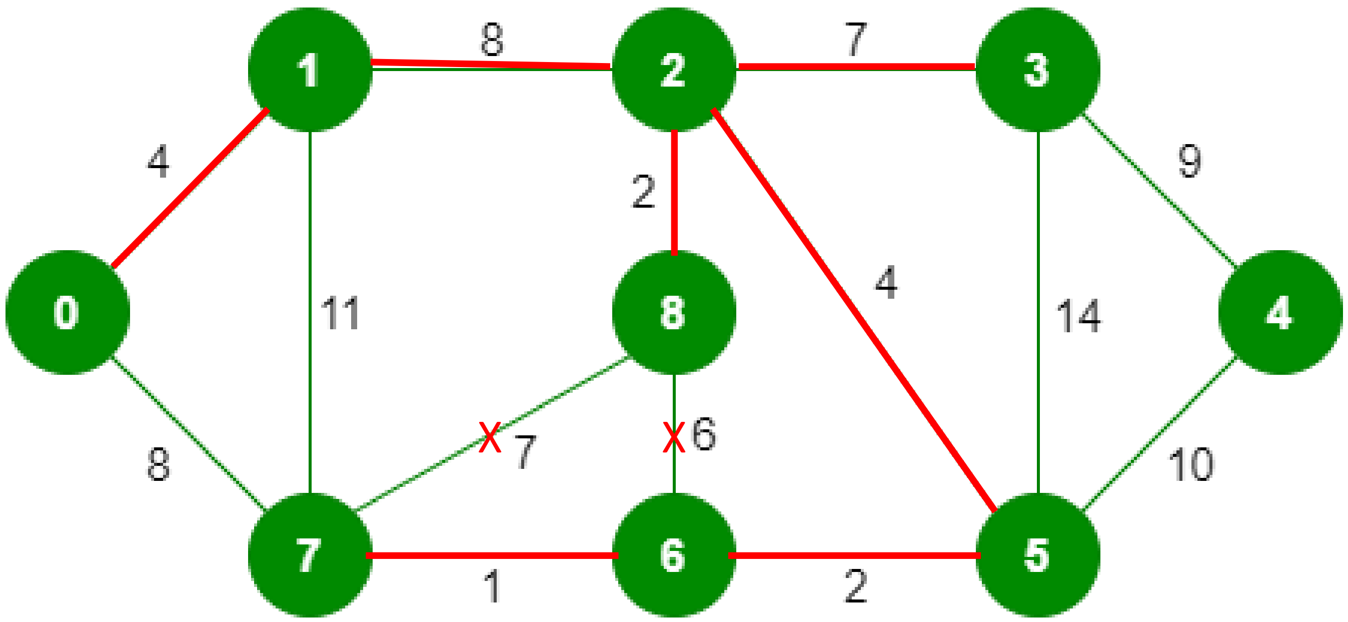
# Minimální kostra grafu – další příklad



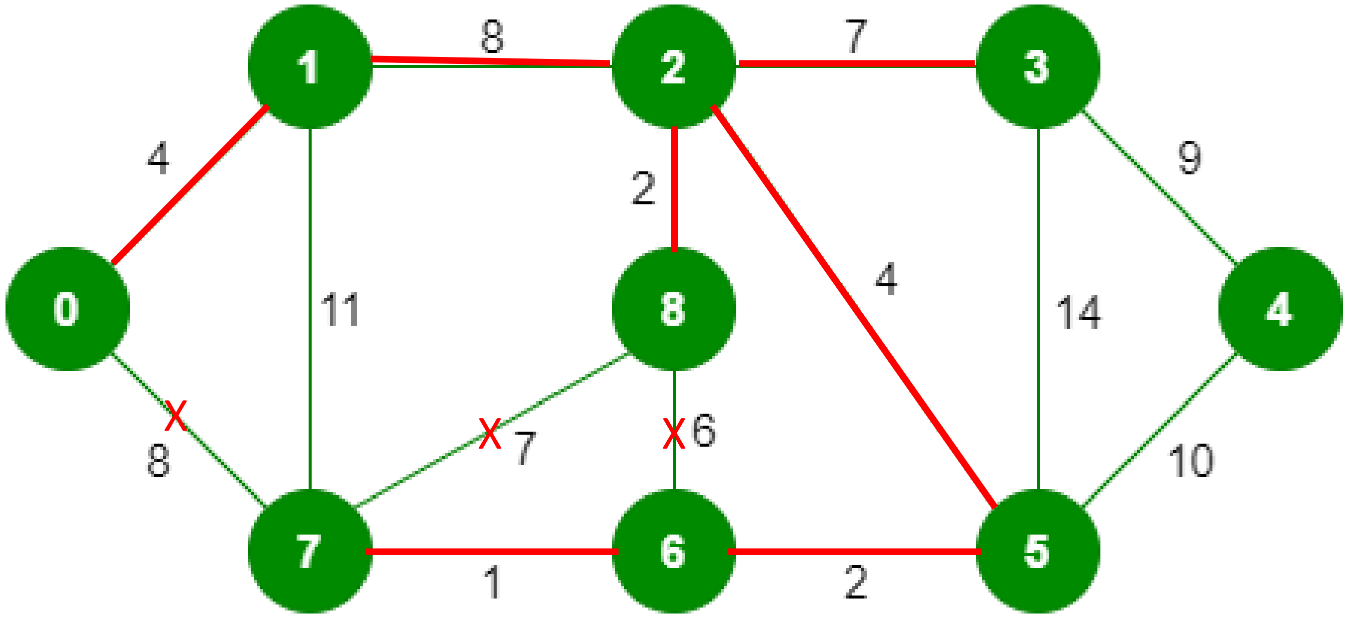
# Minimální kostra grafu – další příklad



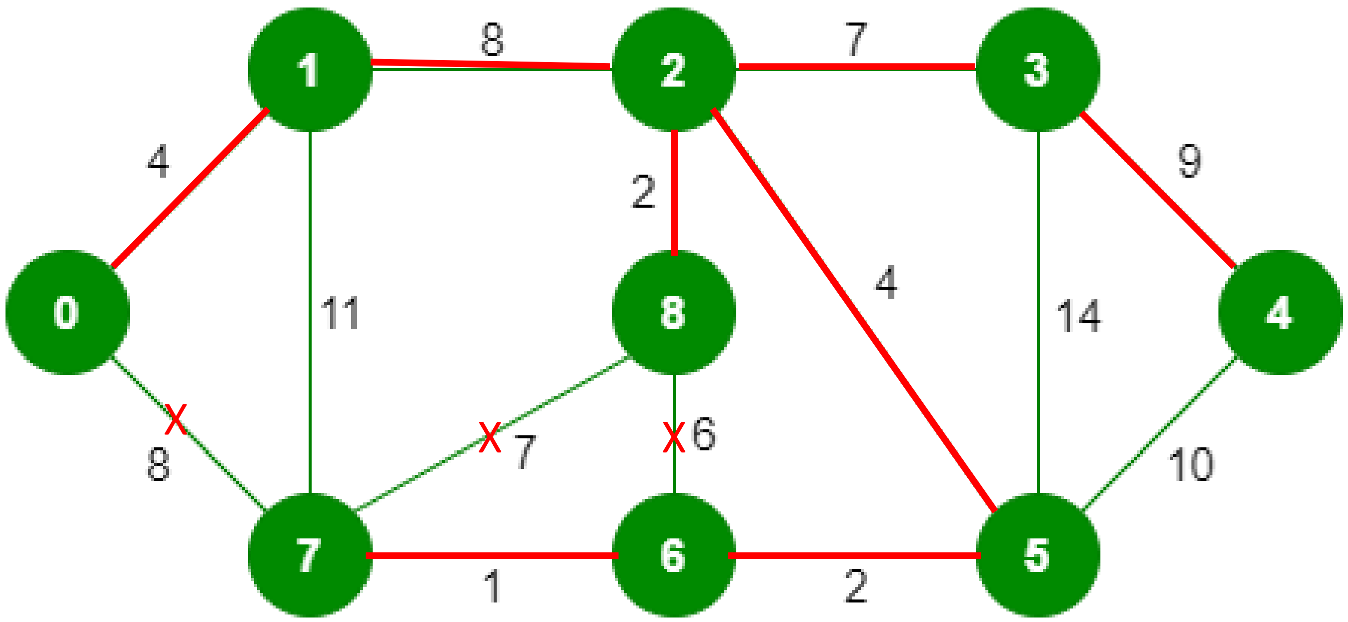
# Minimální kostra grafu – další příklad



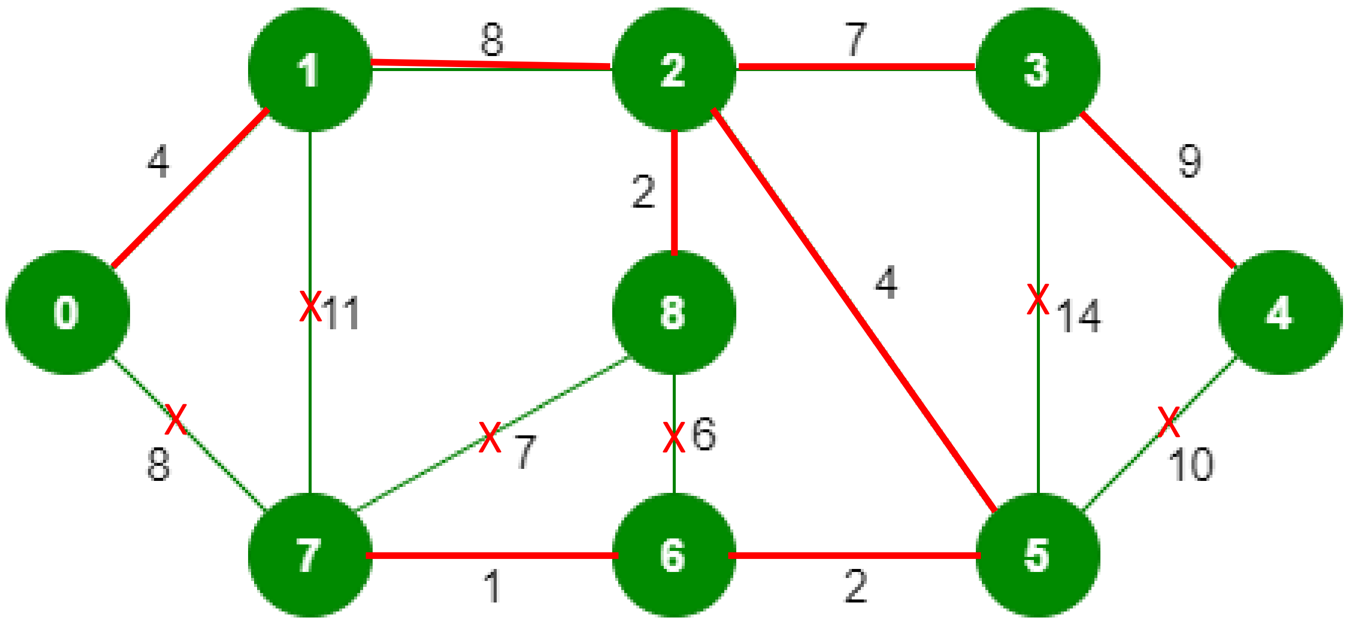
# Minimální kostra grafu – další příklad



# Minimální kostra grafu – další příklad



# Minimální kostra grafu – další příklad




A máme minimální kostru hotovou!