Implikace a ekvivalence

Informatika, ZŠ Broumovská

Petr Socha, 2023
petr.socha@zsbroumovska.cz

Implikace a ekvivalence

- Pro práci s výroky budeme potřebovat ještě dvě logické operace: **implikaci** ($\Rightarrow$) a **ekvivalenci** ($\Leftrightarrow$)

Ekvivalence $\Leftrightarrow$

- Nejprve se podíváme na ekvivalenci, kterou značíme $\Leftrightarrow$.
- Platí:
  - $0 \Leftrightarrow 0 = 1$
  - $0 \Leftrightarrow 1 = 0$
  - $1 \Leftrightarrow 0 = 0$
  - $1 \Leftrightarrow 1 = 1$

Ekvivalence je tedy pravdivá tehdy,
když obě vstupní čísla mají stejnou hodnotu.
Tedy pokud obojí je pravda, nebo pokud obojí je nepravda.

- Formule **A $\Leftrightarrow$ B** znamená, že **A platí právě tehdy, když platí B**
- Ekvivalenci ($\Leftrightarrow$) tedy čteme „právě tehdy, když“
  nebo také „tehdy a jen tehdy, když“

Implikace ⇒

- Implikace ⇒ funguje podobně jako ekvivalence, ale „**jen jedním směrem**“
- Formule **A ⇒ B** znamená, že **pokud platí A, potom platí B**
- Pokud **neplatí A, pak netvrdíme o B nic**
- Implikaci (⇒) tedy čteme „pokud …, potom …“
- Levé straně říkáme **předpoklad**, pravé straně říkáme **závěr**:
  - $0 \Rightarrow 0 = 1$
  - $0 \Rightarrow 1 = 1$
  - $1 \Rightarrow 0 = 0$
  - $1 \Rightarrow 1 = 1$

Pokud je *předpoklad* nepravdivý, může být *závěr* jakýkoliv a výsledek je vždy pravda.

Implikace je nepravdivá jen tehdy, když *předpoklad* je pravdivý, ale *závěr* nepravdivý!

A konečně, pokud je předpoklad i závěr pravdivý, je celá implikace také pravdivá.

Příklad implikace

- „Pokud bude pršet, zůstanu doma“
- P : Bude pršet
- D : Zůstanu doma
- $P \Rightarrow D$

Neříkám tady nic o tom, co se stane, pokud pršet nebude!

P	D	$P \Rightarrow D$	
0	0	1	Pokud neprší a nezůstanu doma, mluvil jsem pravdu.
0	1	1	Pokud neprší a zůstanu doma, mluvil jsem pravdu.
1	0	0	Pokud prší a nezůstanu doma, **nemluvil jsem pravdu**.
1	1	1	Pokud prší a zůstanu doma, mluvil jsem pravdu.

Implikace tedy neříká vůbec nic o tom, co se stane pokud předpoklad (levá strana) neplatí!
Pokud předpoklad neplatí (tady: pokud neprší), je implikace vždy pravdivá.

Příklad implikace

- „Když je státní svátek, jsou uzavřeny supermarkety“
- S : Je státní svátek
- Z : Supermarket má zavřeno
- $S \Rightarrow Z$

- Když je supermarket zavřený, znamená to, že je státní svátek? (Ne!)
  - Supermarket může být uzavřený z mnoha důvodů! Tedy neplatí, že **Z ⇒ S**
- Když je supermarket otevřený, znamená to, že není státní svátek? (Ano!)
  - Pokud neplatí závěr, nemůže platit ani předpoklad! Tedy platí, že **not Z ⇒ not S**
    - **Stejným způsobem lze otočit každou implikaci. Je ale nutné přidat negace (not)!**

Příklad ekvivalence

- „Pokud bude pršet, právě tehdy zůstanu doma“
  nebo také „Zůstanu doma tehdy a jen tehdy, když bude pršet“
- P : Bude pršet
- D : Zůstanu doma
- P ⇔ D

Tedy říkám, že pokud pršet nebude, půjdu ven!

P	D	P ⇔ D	
0	0	1	Pokud neprší a nezůstanu doma, mluvil jsem pravdu.
0	1	0	Pokud neprší a zůstanu doma, **nemluvil jsem pravdu**.
1	0	0	Pokud prší a nezůstanu doma, **nemluvil jsem pravdu**.
1	1	1	Pokud prší a zůstanu doma, mluvil jsem pravdu.

Příklady logické formule

- „V Liberci je to buď do kopce, nebo prší“
  - L: V Liberci
  - K: Je to do kopce
  - P: Prší
  - $L \Rightarrow K$ or P
- „Když si zlomím ruku nebo nohu, nebudu hrát zápas“
  - R: Zlomím si ruku
  - N: Zlomím si nohu
  - Z: Budu hrát zápas
  - (R or N) $\Rightarrow$ (not Z)

Příklady logické formule

- „V Liberci je to buď do kopce, nebo prší“
  - L: V Liberci, K: Je to do kopce, P: Prší
  - L ⇒ K or P

L	K	P	K or P	L ⇒ (K or P)
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Pokud není pravda, že jsme v Liberci, je výrok vždy pravdivý.

Pokud jsme v Liberci, a není to do kopce, ani neprší, tak výrok není pravdivý!

Pokud jsme v Liberci, a je to do kopce, nebo prší, nebo obojí, měli jsme pravdu.

Příklady logické formule

- „Když si zlomím ruku nebo nohu, nebudu hrát zápas“
  - R: Zlomím si ruku, N: Zlomím si nohu, Z: Budu hrát zápas
  - (R or N) ⇒ (not Z)

R	N	Z	(R or N)	not Z	(R or N) ⇒ (not Z)
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Když si nic nezlomím, můžu hrát nebo nehrát, a říkal jsem pravdu.

Pokud budu hrát se zlomenou rukou, nohou, nebo obojím, tak jsem lhal (výsledek implikace je nepravda)

Příklady logické formule

- „Kdo úmyslně ohrozí život nebo zdraví jiného tím, že se zúčastní rvačky, bude potrestán odnětím svobody až na jeden rok. “
  - O: ohrozí život
  - Z: ohrozí zdraví
  - R: zúčastní se rvačky
  - T: je potrestán odnětím svobody až na jeden rok
  - (R and (O or Z)) $\Rightarrow$ T

- Když se někdo zúčastní rvačky, je za to automaticky potrestán?
- Když je někdo potrestán, znamená to, že se zúčastnil rvačky?

Implikace - souvislosti

- Implikaci je někdy výhodné přepsat pomocí NOT a OR:

P	D	P ⇒ D	(not P) or D
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

A ⇒ B
je to samé, jako
(not A) or B

Tedy buď neplatí předpoklad,
nebo platí závěr.

Implikace – souvislosti 2

- Pokud platí **A ⇒ B**, potom platí **not B ⇒ not A**

- Např. „Pokud je státní svátek, jsou zavřené obchody.“
- Potom platí: „Pokud nejsou zavřené obchody, není státní svátek.“

Ostrov poctivců a lhářů

- Na ostrově žijí dvě skupiny lidí: jedna mluví vždy pravdu, druhá vždy lže. Potkáme dva jeho obyvatele, A a B.
- A říká: „**B je poctivec, a já jsem lhář**“. Kdo je poctivec a kdo lhář?

Ostrov poctivců a lhářů (řešení)

- Na ostrově žijí dvě skupiny lidí: jedna mluví vždy pravdu, druhá vždy lže. Potkáme dva jeho obyvatele, A a B.
- A říká: „**B je poctivec, a já jsem lhář**“. Kdo je poctivec a kdo lhář?
- Výrok **A:** A je poctivec. Výrok **B:** B je poctivec.
- A řekl: **B and (not A),** což je pravda,
  jen pokud A je poctivec (nelže): **A ⇔ (B and (not A))**

A	B	B and (not A)	A ⇔ (B and (not A))
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Výrok je pravdivý jen tehdy, když jsou oba (A i B) lháři.

Tedy oba jsou lháři.

Ostrov poctivců a lhářů 2

- Na ostrově žijí dvě skupiny lidí: jedna mluví vždy pravdu, druhá vždy lže. Potkáme tři jeho obyvatele: A, B, C.
- A tvrdí: B a C mají stejnou povahu. Na to se někdo zeptá C: Mají A a B stejnou povahu? Co odpoví C?